Todennäköisyyslaskenta-kurssin tentti 23.11.1998

Tentissä saa olla mukana taskulaskin ja matematiikan tulukkokirjat. Valitse seuraavista neljä tehtävää, jotka teet. Arvostelen vain neljä ensimmäistä vastausta.

1. Todista binomijakauman yhteenlaskuominaisuus: jos $X_1 \sim \mathrm{Bin}(n_1, p)$ ja $X_2 \sim \mathrm{Bin}(n_2, p)$, niin $X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2, p)$

2. Heitetään kahta noppaa, kunnes niiden pistelukujen summaksi saadaan vähintään 10. Määrää tarvittavien heittokertojen X odotusarvo, hajonta sekä mediaani.

3. Olkoon satunnaismuuttujaparin (X, Y) yhteistiheysfunktio muotoa

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(2x^2+4xy+4y^2)} \tag{1}$$

   Määrää satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot, varianssit, kovarianssit ja korrelaatiokerroin.

4. Tehdään n kokoinen satunnaisotos satunnaismuuttujista $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, 1)$. Estimoi suurimman uskottavuuden estimointimenetelmällä (maximum likelihood) odotusarvo μ derivoimalla yhteistiheysfunktion X_i:en tulon logaritmi $\log(f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \mu))$, jonka asetat nollaksi ja ratkaiset yhtälöstä μ:n. Yhden X_i normaalijakauman tiheysfunktio on muotoa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2} \tag{2}$$

5. Otoksesta $n = 30$ saatiin keskiarvoksi $\overline{x} = 20$. Aiempien tutkimusten mukaan kyseinen muuttuja $X \sim \mathrm{N}(28, 25)$. Millä todennäköisyydellä otos on kyseisestä joukosta, eli laske $\mathrm{P}(\overline{X} < 20)$.

Todennäköisyyslaskenta-kurssin tentti 11.12.1998

Tentissä saa olla mukana taskulaskin ja matematiikan tulukkokirjat. Valitse seuraavista neljä tehtävää, jotka teet. Arvostelen vain neljä ensimmäistä vastausta.

1. Eläinyhdyskunnassa on 300 yksilöä, joista 60 on merkitty. Laske tarkasti ja binomijakaumalla approksimoiden todennäköisyys, että 5:stä pyydystetystä eläimestä korkeintaan 4 on merkitty.

2. Satunnaismuuttujat X ja Y ovat stokastisesti riippumattomia ja noudattavat Poisson-jakaumaa parametrein λ ja μ. Todista, että $X+Y$ noudattaa Poisson-jakaumaa parametrillä $\lambda+\mu$.

3. Johda satunnaismuuttujan $X_1+X_2+X_3$ tiheysfunktio, kun X_i:t ovat riippumattomia ja $X_i \sim$Tas(0,1).

4. Kahdeksan henkilöä heittää noppaa. Se, joka saa silmäluvun 1, putoaa pelistä pois.

   (a) Mikä on todennäköisyys, että täsmälleen k pelaajaa ($k=0,1,\ldots,6$) putoaa pelistä ensimmäisellä kierroksella?

   (b) Mikä on ehdollinen todennäköisyys, että k:s pelaaja ($k=1,2,\ldots,6$) on ensimmäinen putoaja, kun ensimmäisellä kierroksella putoaa vain yksi pelaaja?

5. Olkoon satunnaismuuttujaparin (X,Y) yhteystiheysfunktio muotoa

   $$f(x,y)=ce^{-\frac{1}{2}(4x^2-4xy+5y^2)} \tag{3}$$

   Määrää satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot, varianssit, kovarianssi ja korrelaatiokerroin.

6. Olkoon satunnaismuuttujaparin (X,Y) yhteistiheysfunktio muotoa

   $$f(x,y)=2, \text{kun } x+y\leq 1,\ x,\ y\geq 0 \tag{4}$$

   Määrää satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot, varianssit, kovarianssi ja korrelaatiokerroin.